Science Innovation
2017; 5(6): 392-397
http://www.sciencepublishinggroup.com/j/si
doi: 10.11648/j.si.20170506.21
ISSN: 2328-7861 (Print); ISSN: 2328-787X (Online)

Extensive Game of Horse Race: A Research on *Tian Ji's Horse Race* Based on Static Games of Complete Information

Lun Weicheng

College of Systems Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, China

Email address:
1048558916@qq.com

To cite this article:
Lun Weicheng. Extensive Game of Horse Race: A Research on *Tian Ji's Horse Race* Based on Static Games of Complete Information. *Science Innovation*. Vol. 5, No. 6, 2017, pp. 392-397. doi: 10.11648/j.si.20170506.21

Received: October 31, 2017; **Accepted**: November 9, 2017; **Published**: December 6, 2017

Abstract: There are many ways to develop of the classical problem about *Tian Ji's Horse Race* so that this problem may be researched deeply using theory of games. Therefore, this paper designs n-order extensive game of horse race by changing a rule of traditional problem. After analysis, this paper holds a belief that this game is a kind of static games of complete information, which means theory of static games of complete information can be used to research *Tian Ji's Horse Race*. With showing all of the strategy profiles of third-order extensive game of horse race and calculating Nash equilibrium of this game, this paper finds some characteristics of the strategy profiles and Nash equilibrium of extensive game of horse race and give the expression of Nash equilibrium of mixed strategy of this game. A new concept of layout is introduced to reveal how strategy profiles influence the outcome of this game. Then the characteristic of the layouts of extensive game of horse race and the layout that can make Tian Ji's payoff biggest are found and proved, which is drawn from the result of some simulations about fourth-order and fifth-rank extensive games of horse race using a Java program.

Keywords: Static Games of Complete Information, Strategy Profile, Nash Equilibrium, Layout

---

扩展型赛马博弈：基于完全信息静态博弈对田忌赛马的研究

伦伟成

系统工程学院，国防科技大学，长沙，中国

邮箱
1048558916@qq.com

摘要：经典的田忌赛马问题在许多方面都值得进一步优化，从而使其适合于运用博弈论知识加以严格的分析研究。因此，本文在原问题的基础上通过修改规则设计出了n阶扩展型赛马博弈,经分析后认为该博弈属于完全信息静态博弈，于是可以运用完全信息静态博弈相关理论对田忌赛马展开研究。通过列举三阶扩展型赛马博弈的所有策略组合，并用数学方法计算出该博弈的纳什均衡，本文总结出扩展型赛马博弈在策略组合与纳什均衡上的规律，给出了任意阶扩展型赛马博弈的混合策略纳什均衡的表达。为了更好地揭示扩展型赛马博弈的策略组合如何决定了博弈结果，本文引入了布局这一新概念。通过利用Java程序对四阶和五阶扩展型赛马博弈的过程进行仿真，本文根据仿真的结果归纳出了扩展型赛马博弈在布局上的规律，指出使田忌收益最大的布局的表达，并予以证明。

关键词：完全信息静态博弈，策略组合，纳什均衡，布局

1．引言

田忌赛马是一个经典的博弈问题，以往对它的研究大致分为三类：一类致力于构建该博弈的模型，研究如何用矩阵或树状图表示该博弈，以王则柯《博弈论教程》为代表的各类博弈论教材就属于此类[1]；一类围绕着分析该博弈的性质展开，例如田森经研究后认为田忌赛马属于不完全信息动态博弈[2]；还有一类则侧重于如何运用田忌赛马的博弈原理来分析解决实际问题，如杨萍运用田忌赛马的博弈模型为竞速机器人比赛设计战术[3]，柯政分析了选考制度背后存在的类田忌赛马博弈[4]。

上述研究大都没有触及田忌赛马作为一个博弈的本质，即研究田忌赛马所具有的博弈基本要素。近期的研究虽有刘祖华运用Mathematica软件求解田忌赛马博弈的结果[5]，但其求解过程并没有体现博弈论的思想和原理，所使用的博弈矩阵也明显异于此前研究者们的共识。基于此，本文设计了n阶扩展型赛马博弈，旨在运用博弈论理论研究田忌赛马博弈的信息、策略、均衡等要素。

齐王与田忌都有n（$n \geq 3, n \in \boldsymbol{N}_+$，下同）个等级的马，田忌每个等级的马均不如齐王同等级的马快，但要比齐王次等级的马快。两人进行赛马，每局快者胜出，败者须向胜者支付一千两黄金（为便于表示，将每局比赛的奖金一千两黄金表示为1），共比赛n局，谁赢的局数多则为这场赛马的最终赢家（为避免混淆，本文规定一场比赛包含了若干局比赛）。两人都可以随机安排不同等级的马出场，但每种马只能出场一次，且双方都不知道对方的出场顺序安排。

以上就是n阶扩展型赛马博弈的问题描述，相比于经典的田忌赛马（以下简称“经典赛马”），扩展型赛马博弈修改了比赛规则，即齐王的马不再按固定的上中下等顺序出场，也可以自由调整，既然顺序不再固定，则田忌也无从知晓。新增的这一规则反映了本文的一个基本假设：田忌和齐王一样，都是理性的，都深谙马的出场顺序有多种且不同的顺序会导致不同的结果。

扩展型赛马博弈属于完全信息静态博弈。完全信息是指每一个参与人对所有其他参与人（对手）的特征、策略空间和支付函数有确切的知识。静态博弈是指博弈中，参与人同时选择行动或虽非同时但后行动者并不知道前行动者采取了什么具体行动[6]。

如前文所述，田忌和齐王都是理性的，两个参与人都很清楚对方所有可能的行动、所有可能的结果，以及行动是如何影响结果的实现，所以该博弈的信息是完全的。此外，虽然无法保证田忌和齐王是同时决定马的出场顺序，但在n-1局比赛结束前他们都无法得知对方马匹的出场顺序，且一旦双方确定各自马匹的出场顺序，结果就随之确定（不考虑马匹临场发挥情况），完全符合静态博弈的条件[7]。综上可得，扩展型赛马博弈属于完全信息静态博弈。

2．三阶扩展型赛马博弈的策略组合

用A_1、A_2、A_3分别表示齐王的上中下三个等级的马，B_1、B_2、B_3分别表示田忌的上中下三个等级的马，则从速度上来说，有$A_1 > B_1 > A_2 > B_2 > A_3 > B_3$。

在三阶扩展型赛马博弈中，齐王有$A_3^3 = 6$种安排不同等级的马的出场顺序的方法，所以齐王共有六种策略，分别是$A_1A_2A_3$、$A_1A_3A_2$、$A_2A_1A_3$、$A_2A_3A_1$、$A_3A_1A_2$、$A_3A_2A_1$。同理，田忌也有$B_1B_2B_3$、$B_1B_3B_2$、$B_2B_1B_3$、$B_2B_3B_1$、$B_3B_1B_2$、$B_3B_2B_1$六种策略[8]。这样一来，共存在$A_3^3A_3^3 = 36$种策略组合，如表1所示。

表1 扩展型赛马博弈的36种策略组合。

序号	策略组合		赢家	序号	策略组合		赢家
1	A_1 A_2 A_3	B_1 B_2 B_3	齐王	2	A_1 A_3 A_2	B_1 B_2 B_3	齐王
3	A_2 A_1 A_3	B_1 B_2 B_3	齐王	4	A_2 A_3 A_1	B_1 B_2 B_3	田忌
5	A_3 A_1 A_2	B_1 B_2 B_3	齐王	6	A_3 A_2 A_1	B_1 B_2 B_3	齐王
7	A_1 A_2 A_3	B_1 B_3 B_2	齐王	8	A_1 A_3 A_2	B_1 B_3 B_2	齐王
9	A_2 A_1 A_3	B_1 B_3 B_2	田忌	10	A_3 A_1 A_2	B_1 B_3 B_2	齐王
11	A_3 A_1 A_2	B_1 B_3 B_2	齐王	12	A_3 A_2 A_1	B_1 B_3 B_2	齐王
13	A_1 A_2 A_3	B_2 B_1 B_3	齐王	14	A_1 A_3 A_2	B_2 B_1 B_3	齐王
15	A_2 A_1 A_3	B_2 B_1 B_3	齐王	16	A_2 A_3 A_1	B_2 B_1 B_3	齐王
17	A_3 A_1 A_2	B_2 B_1 B_3	齐王	18	A_3 A_2 A_1	B_2 B_1 B_3	田忌

序号	策略组合		赢家	序号	策略组合		赢家
19	A_1 A_2 A_3	B_2 B_3 B_1	齐王	20	A_1 A_3 A_2	B_2 B_3 B_1	齐王
21	A_2 A_1 A_3	B_2 B_3 B_1	齐王	22	A_2 A_3 A_1	B_2 B_3 B_1	齐王
23	A_3 A_1 A_2	B_2 B_3 B_1	田忌	24	A_3 A_2 A_1	B_2 B_3 B_1	齐王
25	A_1 A_2 A_3	B_3 B_1 B_2	田忌	26	A_1 A_3 A_2	B_3 B_1 B_2	齐王
27	A_2 A_1 A_3	B_3 B_1 B_2	齐王	28	A_2 A_3 A_1	B_3 B_1 B_2	齐王
29	A_3 A_1 A_2	B_3 B_1 B_2	齐王	30	A_3 A_2 A_1	B_3 B_1 B_2	齐王
31	A_1 A_2 A_3	B_3 B_2 B_1	齐王	32	A_1 A_3 A_2	B_3 B_2 B_1	田忌
33	A_2 A_1 A_3	B_3 B_2 B_1	齐王	34	A_2 A_3 A_1	B_3 B_2 B_1	齐王
35	A_3 A_1 A_2	B_3 B_2 B_1	齐王	36	A_3 A_2 A_1	B_3 B_2 B_1	齐王

根据表1可以总结出如下结论：

结论1：参与人无法根据第一局比赛的结果推断出另一参与人的策略。

认定扩展型赛马博弈是一种静态博弈的依据之一是田忌和齐王在比赛前都不知道对方的出场顺序，那么有没有可能根据第一局比赛的结果而推断出剩下两局对方派出的马的顺序呢？答案是否定的。用一个最简单的例子来证明，假设第一局田忌派上等马出场，结果输了，则齐王派出的一定是上等马，此时双方都还有中等马和下等马未出场，那么齐王还有“先中等马再下等马”和“先下等马再中等马”这两种出场顺序可供选择。所以田忌根据第一局自己的上等马输了这一结果只能推测出齐王的策略可能是$A_1A_2A_3$或$A_1A_3A_2$，并不能具体确定究竟是哪一个，唯一可以确定的是，这场比赛田忌输定了（参照第1、2、7、8号组合的结果）。

可以将结论1推广到任意阶扩展型赛马博弈，即对于n阶扩展型赛马博弈，参与人无法根据前k（$n-2 \geq k \geq 1, k \in \boldsymbol{N}_+$）局比赛结果精确推断出另一参与人的策略。上文分析了n=3、k=1的情况，当n和k都增加时，情况只会更复杂，自然更不能推测。

结论2：田忌获胜的概率是$\frac{1}{6}$，当且仅当策略组合产生的布局是$\{A_1B_3, A_2B_1, A_3B_2\}$。

下面引入“布局”和“对阵情况”这两个概念来对结论2加以阐述。对阵情况是指每局比赛中双方派出的马的组合，布局是指一场比赛中呈现出的n种对阵情况的集合。布局不考虑对阵情况的先后顺序，如果两个布局包含相同的n种对阵情况，则属于同一种布局。不难发现一种布局可以由$A_n^n = n!$种策略组合所产生，分别对应n种对阵情况的$n!$种全排列。对阵情况决定了每局比赛的输赢，布局则决定了一场比赛的结果。布局、对阵情况、策略、策略组合存在如图1所示的关系。

图1 本文部分概念间的关系。

表1的策略组合列中每一行的两个项就构成了一个对阵情况，共计9种，分别是A_1B_3、A_1B_2、A_1B_3、A_2B_1、A_2B_2、A_2B_3、A_3B_1、A_2B_2、A_3B_3，它们互相组合形成了$\frac{C_9^1C_2^1}{C_3^1}=6$种布局，分别是$\{A_1B_1,A_2B_2,A_3B_3\}$、$\{A_1B_1,A_2B_3,A_3B_2\}$、$\{A_1B_2,A_2B_1,A_3B_3\}$、$\{A_1B_2,A_2B_3,A_3B_1\}$、$\{A_1B_3,A_2B_1,A_3B_2\}$、$\{A_1B_3,A_2B_2,A_3B_1\}$。

表1中使田忌获胜的策略组合有6种，即第4、9、18、23、25、32号组合，所以田忌获胜的概率是$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$。纵向观察这六种组合就能发现，它们所产生的布局其实都是$\{A_1B_3,A_2B_1,A_3B_2\}$，这也正是经典赛马中孙膑为田忌提供的计策[9]。

当然，结论2也可以推广到任意阶扩展型赛马博弈，本文将在第4节详细讨论之。

3. 三阶扩展型赛马博弈的纳什均衡

将每局比赛的奖金一千两黄金表示为1，可以得到如图2所示的三阶扩展型赛马博弈的矩阵表达[10]，其中加粗斜体表示田忌获胜的策略组合对应的支付。

		齐王					
		$A_1A_2A_3$	$A_1A_3A_2$	$A_2A_1A_3$	$A_2A_3A_1$	$A_3A_1A_2$	$A_3A_2A_1$
田忌	$B_1B_2B_3$	-3，3	-1，1	-1，1	***1，-1***	-1，1	-1，1
	$B_1B_3B_2$	-1，1	-3，3	***1，-1***	-1，1	-1，1	-1，1
	$B_2B_1B_3$	-1，1	-1，1	-3，3	-1，1	-1，1	***1，-1***
	$B_2B_3B_1$	-1，1	-1，1	-1，1	-3，3	***1，-1***	-1，1
	$B_3B_1B_2$	***1，-1***	-1，1	-1，1	-1，1	-3，3	-1，1
	$B_3B_2B_1$	-1，1	***1，-1***	-1，1	-1，1	-1，1	-3，3

图2 扩展型赛马博弈的矩阵表达。

通过对图2的分析，可以得出关于扩展型赛马博弈的第三个结论：

结论3：三阶扩展型赛马博弈并不存在纯策略纳什均衡。

如结论2所述，田忌对齐王的每种纯策略的最优反应能够产生$\{A_1B_3,A_2B_1,A_3B_2\}$这种布局，其结果是田忌的收益为1，齐王的收益为-1，显然这对齐王来说并不是最优的。反观齐王，他对田忌的每种纯策略的最优反应是能够产生$\{A_1B_1,A_2B_2,A_3B_3\}$这种布局，其结果是齐王的收益为3，田忌的收益为-3，毫无疑问，这也是田忌决不能接受的。由此可见，对于参与人j的任意一纯策略，一旦参与人i选择了自己的最优反应，参与人i就会放弃该策略，因为在这种情况下该策略不是参与人i的最优反应（$i,j\in\{1,2\}$，参与人1为田忌，参与人2为齐王，下同）。而纯策略纳什均衡必须是两个参与人都选择了最优反应的策略组合，所以扩展型赛马博弈并不存在纯策略纳什均衡。

不存在纯策略纳什均衡并不等于就不存在纳什均衡。纳什定理指出，每个有限策略式博弈均具有混合策略均衡[11]，而扩展型赛马博弈的策略集是有限的，所以一定存在某种混合策略纳什均衡，下面将对其进行推导。为简化标记，下文用$s_{11},\cdots,s_{16}$分别代指田忌的6种策略（按图2田忌策略列从上至下右的顺序），$s_{21},\cdots,s_{26}$分别代指齐王的6种策略（按图2齐王策略行从左至右的顺序）。

所谓混合策略，是指以一定的概率随机选择每一种纯策略。设$\sigma_1=(\sigma_{11},\sigma_{12},\cdots,\sigma_{16})$和$\sigma_2=(\sigma_{21},\sigma_{22},\cdots,\sigma_{26})$分别表示田忌和齐王的混合策略，其含义是田忌将以$\sigma_{11}$的概率选择$s_{11}$策略，以$\sigma_{12}$的概率选择$s_{12}$策略，以此类推，显然，$\sigma_i$满足$\sigma_{i1}+\sigma_{i2}+\cdots+\sigma_{i6}=1$，$i\in\{1,2\}$。

令$v_i(s_{ik},\sigma_{ik})$表示参与人i以σ_{ik}的概率选择s_{ik}策略所获得的期望支付，则有

$$v_i(s_{ik},\sigma_{ik})=\sum_{m=1}^{6}\sigma_{jm}u_i(s_{ik},s_{jm}),$$

其中，$u_i(s_{ik},s_{jm})$表示参与人i通过策略组合(s_{ik},s_{jm})获得的支付（$i,j\in\{1,2\}$，$k,n\in\{1,2,3,4,5,6\}$）。则田忌从自己的六个纯策略上分别获得的支付如下所示：

$$v_1(s_{11},\sigma_{11})=-3\sigma_{21}-\sigma_{22}-\sigma_{23}+\sigma_{24}-\sigma_{25}-\sigma_{26}$$

$$v_1(s_{12},\sigma_{12})=-\sigma_{21}-3\sigma_{22}+\sigma_{23}-\sigma_{24}-\sigma_{25}-\sigma_{26}$$

$$v_1(s_{13},\sigma_{13})=-\sigma_{21}-\sigma_{22}-3\sigma_{23}-\sigma_{24}-\sigma_{25}+\sigma_{26}$$

$$v_1(s_{14},\sigma_{14})=-\sigma_{21}-\sigma_{22}-\sigma_{23}-3\sigma_{24}+\sigma_{25}-\sigma_{26}$$

$$v_1(s_{15},\sigma_{15})=\sigma_{21}-\sigma_{22}-\sigma_{23}-\sigma_{24}-3\sigma_{25}-\sigma_{26}$$

$$v_1(s_{16},\sigma_{16})=-\sigma_{21}+\sigma_{22}-\sigma_{23}-\sigma_{24}-\sigma_{25}-3\sigma_{26}$$

假设存在一个最优混合策略(σ_1^*,σ_2^*)形成了扩展型赛马博弈的混合策略纳什均衡，其中$\sigma_1^*=(\sigma_{11}^*,\sigma_{12}^*,\cdots,\sigma_{16}^*)$，$\sigma_2^*=(\sigma_{21}^*,\sigma_{22}^*,\cdots,\sigma_{26}^*)$，那么田忌采用混合策略$\sigma_1^*$的充要条件是他从构成最优混合策略的所有纯策略中都取得相同的期望支付[12]，否则他就会选择带来期望支付较高的纯策略，因此，存在如下等价关系：

$$v_1(s_{11},\sigma_{11}^*)=v_1(s_{12},\sigma_{12}^*)=\cdots=v_1(s_{16},\sigma_{16}^*)。$$

这个六元一次方程看上去复杂，其实只要通过简单的移项加减就可以进行简化。因为这一过程简单却很繁琐，

这里只列举其中一步：

由$v_1(s_{11},\sigma_{11}^*)=v_1(s_{15},\sigma_{15}^*)$，即$-3\sigma_{21}-\sigma_{22}-\sigma_{23}+\sigma_{24}-\sigma_{25}-\sigma_{26}=\sigma_{21}-\sigma_{22}-\sigma_{23}-\sigma_{24}-3\sigma_{25}-\sigma_{26}$移项可得$\sigma_{24}=2\sigma_{21}-\sigma_{25}$；由$v_1(s_{14},\sigma_{14}^*)=v_1(s_{15},\sigma_{15}^*)$，即$-\sigma_{21}-\sigma_{22}-\sigma_{23}-3\sigma_{24}+\sigma_{25}-\sigma_{26}=\sigma_{21}-\sigma_{22}-\sigma_{23}-\sigma_{24}-3\sigma_{25}-\sigma_{26}$移项可得$\sigma_{24}=2\sigma_{25}-\sigma_{21}$；将移项得到的两个式子联立，化简可得$\sigma_{25}=\sigma_{21}$。

同理可以推导出其它等价关系，最终得到一个简洁但十分重要的结论：

$$\sigma_{21}=\sigma_{22}=\sigma_{23}=\sigma_{24}=\sigma_{25}=\sigma_{26}。$$

因为$\sigma_{21}+\sigma_{22}+\cdots+\sigma_{26}=1$，所以上式可推广得到

$$\sigma_{21}=\sigma_{22}=\sigma_{23}=\sigma_{24}=\sigma_{25}=\sigma_{26}=\frac{1}{6}。$$

这表明，当且仅当齐王采取混合策略$\sigma_2^*=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\cdots,\frac{1}{6}\right)$时，田忌才会采取包含其所有纯策略的混合策略。采用同样的方法可以推出，当且仅当田忌采取混合策略$\sigma_1^*=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\cdots,\frac{1}{6}\right)$时，齐王才会采取包含其所有纯策略的混合策略。

综上，可对结论3加以补充：扩展型赛马博弈有且仅有一个混合策略纳什均衡，该均衡由混合策略组合$\left[\sigma_1^*=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\cdots,\frac{1}{6}\right),\sigma_2^*=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\cdots,\frac{1}{6}\right)\right]$形成，在均衡时，田忌和齐王选择任意一种马出场的顺序的概率都是$\frac{1}{6}$，田忌的期望收益是-1，齐王的期望收益是1。

事实上，这一结论同样适用于任意阶扩展型赛马博弈，文献13证明了n阶扩展型赛马博弈的混合策略纳什均衡是$\sigma_1^*=\sigma_2^*=\underbrace{\left(\frac{1}{n!},\frac{1}{n!},\cdots,\frac{1}{n!}\right)}_{n!}$，即田忌和齐王都以$\frac{1}{n!}$的概率从所有马中任选一匹[13]。

4．高阶扩展型赛马博弈的布局

当$n>3$时，策略组合与布局的数量会显著增加，此时的博弈已属于高阶扩展型赛马博弈。下面以$n=4$和$n=5$这两种情况为例对高阶扩展型赛马博弈进行实证分析。

当$n=4$时，用A_1、A_2、A_3、A_4分别表示齐王的4个等级的马，B_1、B_2、B_3、B_4分别表示田忌的4个等级的马，则在速度上满足$A_1>B_1>A_2>B_2>A_3>B_3>A_4>B_4$。此时，田忌和齐王的策略便增加至$A_4^4=24$种，由此构成的策略组合也增至$A_4^4A_4^4=576$种，从而形成一个$24\times24$的博弈矩阵。显然，进行576次计算以求得每种策略组合的收益结果非人力所能坚持，因此，笔者编写了一个Java程序来对高阶扩展型赛马博弈进行仿真。

仿真结果显示，在576种策略组合中，可以使田忌获胜的策略组合有24种，即田忌获胜的概率是$\frac{1}{24}$，当且仅当策略组合产生的布局是$\{A_1B_4,A_2B_1,A_3B_2,A_4B_3\}$，那24种策略组合即是这4种对阵情况的24个全排列，换言之田忌获胜的布局也只有这一种。此时田忌的收益为2，齐王的收益为-2。此外，由于一场赛马包含了四局比赛，故存在平局，即田忌和齐王各赢两局，两人的总收益都是0，导致平局的策略组合有264种，平局的概率为$\frac{11}{24}$，由此可见，当n是偶数时，齐王获胜的概率并非压倒性的。

当$n=5$时，用A_1、A_2、A_3、A_4、A_5分别表示齐王的4个等级的马，B_1、B_2、B_3、B_4、B_5分别表示田忌的4个等级的马，则在速度上满足$A_1>B_1>A_2>B_2>A_3>B_3>A_4>B_4>A_5>B_5$。此时，田忌和齐王的策略有$A_5^5=120$种，由此构成的策略组合也增至$A_5^5A_5^5=14400$种。程序仿真的结果显示，使田忌获胜的策略组合有3240种，田忌获胜的概率为$\frac{9}{40}$。与$n=3$和$n=4$时的扩展型赛马博弈不同，五阶扩展型赛马博弈中，使田忌获胜的策略组合不再只产生一种布局，而是增加至27种，如表2所示。

表2 五阶扩展型赛马博弈中使田忌获胜的布局。

序号	对阵情况	序号	对阵情况	序号	对阵情况
1	A_2B_1 A_3B_2 A_4B_3 A_1B_4 A_5B_5	2	A_2B_1 A_3B_2 A_1B_3 A_5B_4 A_4B_5	3	A_2B_1 A_3B_2 A_5B_3 A_1B_4 A_4B_5
4	A_2B_1 A_1B_2 A_4B_3 A_5B_4 A_3B_5	5	A_2B_1 A_4B_2 A_1B_3 A_5B_4 A_3B_5	6	A_2B_1 A_4B_2 A_5B_3 A_1B_4 A_3B_5
7	A_2B_1 A_5B_2 A_4B_3 A_1B_4 A_3B_5	8	A_1B_1 A_3B_2 A_4B_3 A_5B_4 A_2B_5	9	A_3B_1 A_1B_2 A_4B_3 A_5B_4 A_2B_5
10	A_3B_1 A_4B_2 A_1B_3 A_5B_4 A_2B_5	11	A_4B_1 A_3B_2 A_1B_3 A_5B_4 A_2B_5	12	A_3B_1 A_4B_2 A_5B_3 A_1B_4 A_2B_5
13	A_4B_1 A_3B_2 A_5B_3 A_1B_4 A_2B_5	14	A_3B_1 A_5B_2 A_4B_3 A_1B_4 A_2B_5	15	A_5B_1 A_3B_2 A_4B_3 A_1B_4 A_2B_5
16	A_2B_1 A_3B_2 A_4B_3 A_5B_4 A_1B_5	17	A_3B_1 A_2B_2 A_4B_3 A_5B_4 A_1B_5	18	A_2B_1 A_4B_2 A_3B_3 A_5B_4 A_1B_5
19	A_3B_1 A_4B_2 A_2B_3 A_5B_4 A_1B_5	20	A_4B_1 A_3B_2 A_2B_3 A_5B_4 A_1B_5	21	A_2B_1 A_3B_2 A_5B_3 A_4B_4 A_1B_5
22	A_2B_1 A_4B_2 A_5B_3 A_3B_4 A_1B_5	23	A_2B_1 A_5B_2 A_4B_3 A_3B_4 A_1B_5	24	A_3B_1 A_4B_2 A_5B_3 A_2B_4 A_1B_5
25	A_3B_1 A_4B_2 A_5B_3 A_2B_4 A_1B_5	26	A_3B_1 A_5B_2 A_4B_3 A_2B_4 A_1B_5	27	A_5B_1 A_3B_2 A_4B_3 A_2B_4 A_1B_5

表3所示的27种布局都分别对应$A_5^5=120$种策略组合，它们共同构成了那3240种可以使田忌获胜的策略，其中除

了第16号布局可以使田忌的收益为3，其它26种布局都使田忌的收益为1。

表3 三种扩展型赛马博弈的布局规律。

阶数	使田忌收益最大的布局
3	$\{A_1B_3, A_2B_1, A_3B_2\}$
4	$\{A_1B_4, A_2B_1, A_3B_2, A_4B_3\}$
5	$\{A_1B_5, A_2B_1, A_3B_2, A_4B_3, A_5B_4\}$

表3列出了n=3、n=4和n=5这三种扩展型赛马博弈使田忌收益最大的布局，不难发现，这三种布局都有一个共同的规律：田忌最低等级的马对阵齐王最高等级的马，田忌其它任一等级的马都对阵比自身低一等级的齐王的马，即$\{A_1B_n, A_2B_1, A_3B_2, \cdots, A_nB_{n-1}\}$。下面证明这个规律对任意阶扩展型赛马博弈都恒成立。

证明：由于布局$H=\{A_1B_n, A_2B_1, A_3B_2, \cdots, A_nB_{n-1}\}$给田忌带来的收益是$n$-2，故而首先证明$n$-2是田忌的最大收益。设布局$G$的收益最大，则其收益必然大于$n$-2，要么是$n$-1要么是$n$。不存在使收益为$n$-1的布局，因为收益为$n$-1说明赢了$n$局比赛，输了1局比赛，这种情况显然是不可能的。如果收益为n，说明n局比赛田忌都赢了，但是在两个参与人的2n种参赛马匹中，速度最快的马是齐王的A_1，田忌没有比A_1更快的马，则至少与A_1对阵的那局比赛田忌是输的，这与推论"n局比赛田忌都赢了"相矛盾，所以收益也不可能是n。综上，在n阶扩展型赛马博弈中，田忌的最大收益只能是n-2。

再证明只有布局H能带来n-2的收益。收益为n-2，说明只输了一局，其它n-1局都赢了。在两个参与人的2n种参赛马匹中，田忌的B_n是速度最慢的，由B_n参加的那局比赛田忌一定是输的，前文已经证明与A_1对阵的那局比赛田忌肯定是输的，所以，如果田忌只能输一局比赛，那么B_n参加的那局比赛和对阵的那局比赛必然是同一场比赛，即必然有A_1对阵B_n。此时田忌还剩下B_2、B_3、$\cdots B_{n-1}$这n-1种马，齐王还剩下A_2、A_3、$\cdots A_n$这n-1种马，因为存在$B_1>A_2>B_2>A_3>\cdots>A_{n-1}>B_n$的关系，所以要想保证剩下$n$-1局比赛田忌都赢，必须要让$A_2$对阵$B_1$、$A_3$对阵$B_2$、……、$A_n$对阵$B_{n-1}$，任何一局比赛的对阵情况都不能变。考虑幅度最小的一种改动，其中一局比赛的对阵情况由A_iB_{i-1}和$A_{j+1}B_j$改为A_iB_j和$A_{j+1}B_{i-1}$（$i>j$），则原先都是田忌赢的两局比赛变成了田忌一胜一败，其结果是田忌最终只赢了n-2局比赛，获得n-4的收益。也就是说，在布局H的基础上，改变一个对阵情况必将引起另一个对阵情况的改变，使田忌输掉一局本该获胜的比赛，从而导致收益减2。综上，只有布局H能带来n-2的收益。

基于上文的证明可得：对于任意阶扩展型赛马博弈，布局H都是使田忌获得最大收益的唯一布局。

5．结论

本文以三阶扩展型赛马博弈为例，分析总结出任意阶扩展型赛马博弈在策略组合上都存在的一个规律，即参与人无法根据前k（$n-2\geq k\geq 1, k\in \boldsymbol{N}_+$）局比赛结果精确推断出另一参与人的策略，这从另一个方面证明了扩展型赛马博弈属于静态博弈。

通过对三阶扩展型赛马博弈的纳什均衡的推导求解可以发现，n阶扩展型赛马博弈的混合策略纳什均衡是$\sigma_1^*=\sigma_2^*=\underbrace{\left(\frac{1}{n!},\frac{1}{n!},\cdots,\frac{1}{n!}\right)}_{n!}$，这表明在博弈均衡时，所有策略都是无差别的，田忌和齐王都将以相同的概率从所有马中任选一匹。

文章提出并重点介绍了布局的概念，并对三、四、五阶扩展型赛马博弈的布局分别进行了研究，从而认定使田忌获得最大收益的布局有且只有一种，就是$\{A_1B_n, A_2B_1, A_3B_2, \cdots, A_nB_{n-1}\}$，其收益为$n$-2。这条结论对团体竞技项目也具有指导意义，当双方实力都不对等时，弱势一方要想取胜，则须制造局部优势，即用己方较强的对阵对方较弱的，用己方最弱的对阵对方最强的。

参考文献

[1] 王则柯，李杰. 博弈论教程[M]. 北京：中国人民大学出版社，2010:27。

[2] 田森."田忌赛马"的博弈理论探讨[J]. 商，2008,7:156-157。

[3] 杨萍，史小星，李尧. 竞速机器人比赛的博弈策略研究[J]. 机械设计，2011,28(3):1-5。

[4] 柯政."选考"制度下的"田忌赛马"：原因与对策[J]. 教育发展研究，2011,18:32-38。

[5] 刘祖华，冯爱芳. 用Mathematicia软件求解矩阵博弈[J]. 高度数学研究，2017,20(4):71-74。

[6] 张维迎. 博弈论和信息经济学[M]. 上海：上海人民出版社，2004:12-15。

[7] 史蒂文•泰迪里斯. 博弈论导论[M]. 李井奎，北京：中国人民大学出版社，2015:60-61。

[8] 蒋志芳. 对"齐王赛马"问题的求解. 南京经济学院学报，2002,1:34-36。

[9] 周瀚光. 论孙膑的对策论和辩证法[J]. 齐鲁学刊，1984,3:36-39。

[10] 范如国. 博弈论[M]. 武汉：武汉大学出版社，2011:10-11。

[11] 朱•弗登博格，让•梯若尔. 博弈论[M]. 黄涛等，北京：中国人民大学出版社，2016:24。

[12] 蒲勇健. 应用博弈论[M]. 重庆：重庆大学出版社，2014:34-35。

[13] 尹向飞，陈柳钦. 对"田忌赛马"类博弈的探讨[J]. 工业技术经济，2006,25(10):119-123。